



حل معادله ترابرد یک بعدی و چندگروهی نوترون با استفاده از روش SDP_1

مسعود نظری^{۱*}

^۱.دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده مهندسی هسته ای، گروه راکتور

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۷/۲۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۸/۱۹

چکیده

روش هماهنگ‌های کروی دوگانه DPN تقریبی مرسوم در بررسی معادله ترابرد نوترون در مسائل فیزیک راکتور است. در داخل یک راکتور در نزدیکی نقاطی که در آن‌ها ناپیوستگی‌های شدیدی در ویژگی‌های مواد اتفاق می‌افتد، مانند مرزهای خلأ یا نواحی نزدیک جاذب‌های قوی، معمولاً ناهمسانگردی بیشتری در توزیع زاویه‌ای شار نوترون‌ها مشاهده می‌شود. توصیف مناسب‌تر رفتار شار زاویه‌ای در چنین نقاطی مستلزم به کارگیری روش‌هایی مانند DPN است که به جای استفاده از یک بسط برای تمام جهت‌ها، مانند روش PN، از بسط‌های جداگانه برای جهت‌های مختلف حرکت نوترون‌ها استفاده می‌کنند. در این مقاله به حل معادله ترابرد یک بعدی و چندگروهی نوترون در دستگاه مختصات کارتزین با استفاده از تقریب DP1 پرداخته می‌شود. برای این کار ابتدا معادله‌های DP1 چندگروهی و شرایط مرزی مربوطه به دست آمده و بعد به صورت معادلات پخش چندگروهی نوشته می‌شوند که اصطلاحاً آن‌ها را در اینجا معادلات DP1 ساده شده یا SDP1 می‌نامیم. سپس روش المان محدود برای حل عددی معادله‌های SDP1 به کار گرفته می‌شود. نتایج حاصل از روش ارائه شده برای چند مسئله آزمون مختلف در مقایسه با روش P3 مورد بحث قرار می‌گیرند.

واژه های کلیدی: معادله ترابرد نوترون، تقریب هماهنگ‌های کروی دوگانه، معادله پخش نوترون، روش المان محدود

۱. مقدمه

کارگیری بسط با تعداد جملاتی زیاد است. مشکل دیگر تقریب P_N و سایر تقریب‌های حاوی ممان‌های زاویه‌ای تمام‌دامنه، عدم همگرایی خطا تقریب در نزدیک ناپیوستگی‌ها به صفر است حتی با وجود به کارگیری مراتب بالاتر در بسط هماهنگ‌های کروی (Ziering & Schiff, 1958).

روش P_N دوگانه (DP_N) به عنوان راه حلی برای مشکل یادشده پیشنهاد شد (Yvon, 1957). ایده اصلی در این روش به کارگیری یک بسط جداگانه برای توزیع زاویه‌ای نوترون در هر ناحیه است به جای استفاده از یک بسط برای تمام زاویه‌ها. بنابراین ناپیوستگی در توزیع زاویه‌ای را می‌توان به شکل مناسبی با استفاده از بسطی جداگانه برای هر طرف ناپیوستگی تقریب زد، به طوری که ناپیوستگی در زاویه به

شار کل نوترون در داخل یک راکتور به طور نسبتاً دقیق توسط معادلات P_N قابل محاسبه است. چراکه توزیع زاویه‌ای در قسمت‌های داخلی یک محیط همگن تقریباً همسانگرد است و روش هماهنگ‌های کروی با دقت قابل قبولی در چنین شرایطی عمل می‌کند. با این وجود، در نزدیکی نقاطی که ناپیوستگی‌های شدیدی در ویژگی‌های مواد اتفاق می‌افتد، مانند مرزهای خلأ یا نواحی نزدیک جاذب‌های قوی، معمولاً ناهمسانگردی بیشتری در توزیع زاویه‌ای شار نوترون‌ها مشاهده می‌شود. ناپیوستگی‌های مذکور تغییراتی پله‌ای را در شار زاویه‌ای ایجاد می‌کنند. تقریب یک تابع پله‌ای با استفاده از روش‌هایی مانند P_N ، که از ممان‌های زاویه‌ای تمام‌دامنه (full-range) بهره می‌برند، مستلزم به

(MP_N) به نتایج دقیق‌تری منجر می‌شود (Ghazaie et al., 2019).

حل عددی معادلات P_N در هندسه یک‌بعدی از طریق تبدیل آن‌ها به معادلات پخش چندگروهی روشی متداول و کارآمد به شمار می‌رود (McClarren, 2011). بهره‌گیری از چنین رویکردی برای حل معادلات DP_N کاری است که در (Gelbard et al., 1959) انجام شده است. نویسندگان معادلات DP₁ یک‌گروهی را به معادله‌های دوگروهی پخش تبدیل کرده و آن‌ها را با استفاده از روش اختلاف محدود برای تیغه‌ای یک‌بعدی با شرط مرزی صفر بودن شار کل روی مرزها حل نموده‌اند. ما از همین ایده در مقاله حاضر برای حل معادلات DP₁ در مختصات کارتزین یک‌بعدی استفاده می‌کنیم. معادلات DP₁ چندگروهی را به معادلات پخش چندگروهی تبدیل کرده و از آن‌ها با عنوان معادلات SDP₁ یاد می‌کنیم. سپس درباره چگونگی به کارگیری روش المان محدود برای حل معادله‌های پخش چندگروهی حاصله بحث می‌کنیم.

در بخش ۲ چگونگی به دست آوردن معادلات DP₁ چندگروهی از معادله ترابرد نوترون در دستگاه مختصات کارتزین یک‌بعدی و سپس تبدیل آن‌ها به معادلات پخش چندگروهی، معادلات SDP₁، بیان می‌شود. استفاده از روش المان محدود برای حل عددی معادله‌های SDP₁ موضوعی است که در بخش ۳ به آن پرداخته می‌شود. در بخش ۴ نتایج به کارگیری روش عددی برای چند مسئله آزمون را در مقایسه با نتایج روش P₃ ارائه کرده و دقت آن را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. نتیجه‌گیری در بخش ۵ انجام می‌شود.

۲- معادلات SDP₁ چندگروهی

۲-۱- به دست آوردن معادلات DP₁

معادله ترابرد یک‌گروهی نوترون در حالت پایا در دستگاه مختصات کارتزین یک‌بعدی به صورت

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \Sigma_t(x) \psi(x, \mu) = \int_{-1}^1 \Sigma_s(x, \mu_0) \psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu) \quad (1)$$

نوشته می‌شود که

$$Q(x, \mu) = \nu \Sigma_f(x) \phi(x) + q_e(x, \mu) \quad (2)$$

عبارت چشمه و

وسیله ناپیوستگی در ضرایب بسط هماهنگ‌های کروی بیان می‌شود. به بیان دیگر، در این روش از ممان‌های زاویه‌ای نیم‌دامنه (half-range) به جای ممان‌های تمام‌دامنه برای توصیف دقیق‌تر رفتار شار زاویه‌ای نوترون استفاده می‌شود. این امر به خصوص در دستگاه مختصات کارتزین دارای اهمیت است چرا که امکان ارضاء دقیق شرط مرزی خلأ را فراهم می‌کند (Bell & Glasstone, 1970). تقریب DP_N عملکرد بهتری نسبت به روش هماهنگ‌های کروی تمام‌دامنه در مسائل حاوی ناپیوستگی‌های شدید در توزیع زاویه‌ای نوترون داشته و معمولاً دقت آن قابل مقایسه با روش P_{2N+1} است (Clark & Hansen, 1964).

کاربرد تقریب DP_N در حل معادله ترابرد نوترون، بعد از معرفی شدن در (Yvon, 1957)، اولین بار توسط (Ziering & Schiff, 1958) مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله با رویکردی تحلیلی به حل معادلات DP_N با پراکندگی همسانگرد در مختصات کارتزین یک‌بعدی پرداخته شده است. این نویسندگان همین کار را در (Schiff & Ziering, 1960) به مختصات کارتزین دوبعدی تعمیم داده‌اند. رفتار مجانبی معادلات DP_N در (Huang & Lewis, 1972) با معادلات P_N مقایسه شده است. (Khouaja et al., 1997) از معدود مقالاتی است که از تقریب DP_N در مختصاتی غیر از کارتزین، یعنی دستگاه مختصات استوانه‌ای، بهره گرفته است. به عنوان یکی از جامع‌ترین آثار در زمینه کاربرد روش DP_N در حل معادله ترابرد نوترون می‌توان به (Ghazaie et al., 2017) اشاره نمود. در این کار رویکردی وردشی برای حل عددی معادله ترابرد یک و دوبعدی نوترون با تقریب هماهنگ‌های کروی دوگانه، با مرتبه دلخواه ناهمسانگردی سطح مقطع پراکندگی، توسط روش المان محدود ارائه شده و نتایج مربوطه با نتایج روش P_N مقایسه شده‌اند. همین نویسندگان نشان داده‌اند که تعمیم تقریب هماهنگ‌های کروی دوگانه (معادلات DP_N) به هماهنگ‌های کروی چندگانه (معادلات

$$\phi(x) \equiv \int_{-1}^1 \psi(x, \mu) d\mu$$

و در مرز بازتابنده

$$\psi(x_{\pm}, \mu) = \psi(x_{\pm}, -\mu) \quad (4)$$

هستند (Stacey, 2007). طبق روال معمول، سطح مقطع پراکندگی دیفرانسیلی نوترون، $\Sigma_s(x, \mu_0)$ ، در معادله (1) بر حسب چندجمله‌ای‌های لژاندر به شکل

$$\Sigma_s(x, \mu_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{2} \Sigma_{s,m}(x) P_m(\mu_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{2} \Sigma_{s,m}(x) P_m(\mu) P_m(\mu') \quad (5)$$

نتیجه شده است (Stacey, 2007). با جای‌گذاری بسط چندجمله‌ای‌های لژاندر در مختصات یک‌بعدی،

شار کل نوترون است. شرط‌های مرزی این معادله در مرز سمت چپ $x = x_-$ و سمت راست $x = x_+$ محیط مورد بررسی در مرز خلأ

$$\psi(x_-, \mu) = 0, \quad \mu > 0 \quad (3a)$$

$$\psi(x_+, \mu) = 0, \quad \mu < 0 \quad (3b)$$

بسط داده می‌شود. تساوی دوم در رابطه بالا از قضیه جمع چندجمله‌ای‌های لژاندر در مختصات یک‌بعدی،

$$P_m(\mu_0) = P_m(\mu) P_m(\mu')$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \Sigma_t(x) \psi(x, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{2} \Sigma_{s,m}(x) P_m(\mu) \int_{-1}^1 P_m(\mu') \psi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu) \quad (6)$$

تبدیل می‌شود. برای به دست آوردن معادلات تقریب DP_N ، شار زاویه‌ای نوترون را به صورت

$$\psi(x, \mu) \equiv \sum_{n=0}^N (2n+1) [\phi_n^-(x) P_n^-(\mu) + \phi_n^+(x) P_n^+(\mu)] \quad (7)$$

بر حسب چندجمله‌ای‌های لژاندر تعریف‌شده روی نصف دامنه تغییرات متغیر μ (چندجمله‌ای‌های نیم‌دامنه)

$$P_n^-(\mu) \equiv \begin{cases} P_n(2\mu+1), & \mu < 0 \\ 0, & \mu \geq 0 \end{cases} \quad (8a)$$

$$P_n^+(\mu) \equiv \begin{cases} 0, & \mu < 0 \\ P_n(2\mu-1), & \mu \geq 0 \end{cases} \quad (8b)$$

بسط می‌دهیم (Stacey, 2007). نیم‌ممان‌های شار زاویه‌ای به کار رفته در بسط (7) با رابطه

$$\phi_n^{\pm}(x) \equiv \pm \int_0^{\pm} d\mu P_n^{\pm}(\mu) \psi(x, \mu) \quad (9)$$

تعریف می‌شوند. عبارت $Q(x, \mu)$ در معادله (1) را نیز مشابه (7) به صورت

$$Q(x, \mu) \equiv \sum_{n=0}^N (2n+1) [S_n^-(x) P_n^-(\mu) + S_n^+(x) P_n^+(\mu)] \quad (10)$$

بسط می‌دهیم که

$$S_n^\pm(x) \equiv \pm \int_0^\pm d\mu P_n^\pm(\mu) Q(x, \mu)$$

با قرار دادن عبارت (2) در رابطه بالا و استفاده از (9)، نیم‌ممان‌های چشمه به شکل

$$S_n^\pm(x) = v\Sigma_f(x)[\phi_0^-(x) + \phi_0^+(x)] \pm \int_0^\pm d\mu P_n^\pm(\mu) q_e(x, \mu) \quad (11)$$

درمی‌آیند. از قرار دادن معادلات (7) و (10) در (6)، سپس به کارگیری روابط (8)، تعریف

$$C_{n,m}^\pm \equiv \pm \int_0^\pm d\mu P_n(\mu) P_m^\pm(\mu) \quad (12)$$

و استفاده از رابطه تعامد

$$\int_{-1}^0 d\mu P_n^-(\mu) P_m^-(\mu) = \int_0^1 d\mu P_n^+(\mu) P_m^+(\mu) = \frac{\delta_{n,m}}{2n+1} \quad (13)$$

و رابطه بازگشتی چندجمله‌ای‌های لژاندر نیم‌دامنه

$$\mu P_n^\pm(\mu) = \frac{n+1}{2(2n+1)} P_{n+1}^\pm(\mu) \pm \frac{1}{2} P_n^\pm(\mu) + \frac{n}{2(2n+1)} P_{n-1}^\pm(\mu) \quad (14)$$

بعد از چند عملیات جبری نسبتاً طولانی، در نهایت معادلات

$$\begin{aligned} \frac{n}{2n+1} \frac{d\phi_{n-1}^-}{dx} - \frac{d\phi_n^-}{dx} + \frac{n+1}{2n+1} \frac{d\phi_{n+1}^-}{dx} + 2\Sigma_t \phi_n^- = \\ \sum_{m=0}^M (2m+1) C_{m,n}^- \Sigma_{s,m} \sum_{l=0}^N (2l+1) [C_{m,l}^- \phi_l^- + C_{m,l}^+ \phi_l^+] + 2S_n^- \end{aligned} \quad (15a)$$

$$\begin{aligned} \frac{n}{2n+1} \frac{d\phi_{n-1}^+}{dx} + \frac{d\phi_n^+}{dx} + \frac{n+1}{2n+1} \frac{d\phi_{n+1}^+}{dx} + 2\Sigma_t \phi_n^+ = \\ \sum_{m=0}^M (2m+1) C_{m,n}^+ \Sigma_{s,m} \sum_{l=0}^N (2l+1) [C_{m,l}^- \phi_l^- + C_{m,l}^+ \phi_l^+] + 2S_n^+ \end{aligned} \quad (15b)$$

به ترتیب برای ممان‌های منفی و مثبت شار زاویه‌ای نوترون حاصل می‌شوند (Bell & Glasstone, 1970). با تعریف

$$\phi_m(x) \equiv \sum_{l=0}^N (2l+1) [C_{m,l}^- \phi_l^-(x) + C_{m,l}^+ \phi_l^+(x)] \quad (16)$$

معادلات (15) را به شکل‌های خلاصه‌تر

$$\frac{n}{2n+1} \frac{d\phi_{n-1}^\mp}{dx} \mp \frac{d\phi_n^\mp}{dx} + \frac{n+1}{2n+1} \frac{d\phi_{n+1}^\mp}{dx} + 2\Sigma_t \phi_n^\mp = \sum_{m=0}^M (2m+1) C_{m,n}^\mp \Sigma_{s,m} \phi_m + 2S_n^\mp \quad (17)$$

بیان می‌کنیم.

شرایط مرزی برای معادله‌های (17) از قرار دادن بسط شار زاویه‌ای (7) در روابط (3) و (4) حاصل می‌شوند. بر این اساس، شرط مرزی خلأ و بازتابنده برای معادلات (17) به ترتیب به شکل

$$\phi_n^\pm(x_{\mp}) = 0 \quad (18)$$

$$\phi_n^+(x_{\pm}) = (-1)^n \phi_n^-(x_{\pm}) \quad (19)$$

نوشته می‌شوند.

معادلات DP₁

برای به دست آوردن معادلات DP₁ مطابق معمول فرض می‌کنیم

$$S_n^\pm(x) = \frac{\delta_{n,0}}{2} S_n^\pm(x) = \frac{1}{2} [v \Sigma_f(x) \phi_0(x) + q_e(x)] \equiv \frac{1}{2} S_0(x) \quad (20)$$

یعنی چشمه‌های همسانگرد به قدرت $S_0/2$ در محیط وجود دارد. با جای‌گذاری $N = 1$ و عبارت بالا در معادله‌های (17)، چهار معادله

$$-\frac{d\phi_0^-}{dx} + \frac{d\phi_1^-}{dx} + 2\Sigma_t \phi_0^- = \Sigma_{s,0} \phi_0 - \frac{3}{2} \Sigma_{s,1} \phi_1 + \frac{7}{8} \Sigma_{s,3} \phi_3 + S_0 \quad (21a)$$

$$\frac{1}{3} \frac{d\phi_0^-}{dx} - \frac{d\phi_1^-}{dx} + 2\Sigma_t \phi_1^- = \frac{1}{2} \Sigma_{s,1} \phi_1 - \frac{5}{4} \Sigma_{s,2} \phi_2 + \frac{7}{8} \Sigma_{s,3} \phi_3 \quad (21b)$$

$$\frac{d\phi_0^+}{dx} + \frac{d\phi_1^+}{dx} + 2\Sigma_t \phi_0^+ = \Sigma_{s,0} \phi_0 + \frac{3}{2} \Sigma_{s,1} \phi_1 - \frac{7}{8} \Sigma_{s,3} \phi_3 + S_0 \quad (21c)$$

$$\frac{1}{3} \frac{d\phi_0^+}{dx} + \frac{d\phi_1^+}{dx} + \frac{2}{3} \frac{d\phi_2^+}{dx} + 2\Sigma_t \phi_1^+ = \frac{1}{2} \Sigma_{s,1} \phi_1 + \frac{5}{4} \Sigma_{s,2} \phi_2 + \frac{7}{8} \Sigma_{s,3} \phi_3 \quad (21d)$$

برای ممان‌های منفی و مثبت شار زاویه‌ای حاصل می‌شوند.

جدول ۱- مقادیر کمیت $C_{n,m}^\pm$ استفاده‌شده در نوشتن روابط (22)

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$C_{0,m}^\pm$	1	0	0	0
$C_{1,m}^\pm$	$\pm 1/2$	1/6	0	0
$C_{2,m}^\pm$	0	$\pm 1/4$	1/20	0
$C_{3,m}^\pm$	$\pm 1/8$	1/8	$\pm 1/8$	1/56

ممان‌های ϕ_n به کار رفته در معادلات (21)، طبق روابط (12)، (16) و داده‌های جدول ۱ عبارت‌اند از:

$$\phi_0 = \phi_0^- + \phi_0^+ \quad (22a)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(-\phi_0^- + \phi_0^+ + \phi_1^- + \phi_1^+) \quad (22b)$$

$$\phi_2 = \frac{3}{4}(-\phi_1^- + \phi_1^+) \quad (22c)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{8}(\phi_0^- - \phi_0^+ + 3\phi_1^- + 3\phi_1^+) \quad (22d)$$

با انجام چند عملیات جبری می‌توان روابط

$$\phi_0^+ + \phi_0^- = \phi_0 \quad (23a)$$

$$\phi_1^+ + \phi_1^- = \frac{1}{2}\phi_1 + 2\phi_3 \quad (23b)$$

$$\phi_0^+ - \phi_0^- = \frac{3}{2}\phi_1 - 2\phi_3 \quad (23c)$$

$$\phi_1^+ - \phi_1^- = \frac{4}{3}\phi_2 \quad (23d)$$

را از معادلات (22) به دست آورد که در ادامه از آن‌ها استفاده برای ادامه کار مناسب‌تر آن است که سمت چپ معادلات (21) نیز بر حسب ممان‌های ϕ_n نوشته شوند. برای این منظور، از جمع معادله‌های (21a) و (21c) داریم

$$\frac{d}{dx}(\phi_0^+ + \phi_0^-) + \frac{d}{dx}(\phi_1^+ + \phi_1^-) + 2\Sigma_t(\phi_0^+ + \phi_0^-) - 2\Sigma_{s,0}\phi_0 = 2S_0$$

که با به کار گیری روابط (23) به

$$\frac{d\phi_1}{dx} + (\Sigma_t - \Sigma_{s,0})\phi_0 = S_0 \quad (24)$$

تبدیل می‌شود. از دیگر ترکیب‌های خطی معادلات (21)، به کمک روابط (23)، سه معادله دیگر به صورت

$$-(21a) + (21b) + (21c) + (21d) \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{d\phi_0}{dx} + \frac{2}{3}\frac{d\phi_2}{dx} + (\Sigma_t - \Sigma_{s,1})\phi_1 = 0 \quad (25)$$

$$-(21b) + (21d) \Rightarrow \frac{2}{5}\frac{d\phi_1}{dx} + \frac{8}{15}\frac{d\phi_3}{dx} + \left(\frac{16}{15}\Sigma_t - \Sigma_{s,2}\right)\phi_2 = 0 \quad (26)$$

$$-(21a) - 3(21b) + (21c) - 3(21d) \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{d\phi_2}{dx} + \left(2\Sigma_t - \frac{7}{8}\Sigma_{s,3}\right)\phi_3 = 0 \quad (27)$$

حاصل می‌شوند. در نهایت، به کار گیری تعاریف

$$\Sigma_0 \equiv \Sigma_t - \Sigma_{s,0} \quad (28a)$$

$$\Sigma_1 \equiv \Sigma_t - \Sigma_{s,1} \quad (28b)$$

$$\Sigma_2 \equiv \frac{16}{15}\Sigma_t - \Sigma_{s,2} \quad (28c)$$

$$\Sigma_3 \equiv 2\Sigma_t - \frac{7}{8}\Sigma_{s,3} \quad (28d)$$

در معادلات (24) تا (27) شکل نهایی معادلات DP_1 به صورت

$$\frac{d\phi_1}{dx} + \Sigma_0\phi_0 = S_0 \quad (29a)$$

$$\frac{1}{3}\frac{d\phi_0}{dx} + \frac{2}{3}\frac{d\phi_2}{dx} + \Sigma_1\phi_1 = 0 \quad (29b)$$

$$\frac{2}{5}\frac{d\phi_1}{dx} + \frac{8}{15}\frac{d\phi_3}{dx} + \Sigma_2\phi_2 = 0 \quad (29c)$$

$$\frac{1}{3}\frac{d\phi_2}{dx} + \Sigma_3\phi_3 = 0 \quad (29d)$$

را نتیجه می‌دهد.

۲-۲- تبدیل معادلات DP_1 یک‌گروهی به معادلات پخش دوگروهی

ممان‌های اول و سوم شار زاویه‌ای به ترتیب از رابطه‌های

(29b) و (29d) به صورت

$$\phi_1 = -\frac{1}{3\Sigma_1}\frac{d}{dx}(\phi_0 + 2\phi_2) \quad (30)$$

$$\phi_2 = -\frac{1}{3\Sigma_3}\frac{d}{dx}\phi_2 \quad (31)$$

به دست می‌آیند. از قرار دادن مقادیر فوق در دو رابطه دیگر

حاوی مشتق‌های ممان‌های زوج، (29a) و (29c)،

معادله‌های

$$-\frac{d}{dx}\frac{1}{3\Sigma_1}\frac{d}{dx}(\phi_0 + 2\phi_2) + \Sigma_0\phi_0 = S_0 \quad (32)$$

$$-\frac{d}{dx}\frac{1}{3\Sigma_3}\frac{d}{dx}\phi_2 + \frac{15}{8}\Sigma_2\phi_2 = \frac{3}{4}(\Sigma_0\phi_0 - S_0) \quad (33)$$

حاصل می‌شوند. با تعریف

$$D_1(x) \equiv \frac{1}{3\Sigma_1(x)} \quad (34)$$

$$D_2(x) \equiv \frac{1}{3\Sigma_3(x)} \quad (35)$$

به عنوان ضرایب پخش و

$$\Phi_1(x) \equiv \phi_0(x) + 2\phi_2(x) \quad (36)$$

$$\Phi_2(x) \equiv \phi_2(x) \quad (37)$$

به عنوان شار کل گروه‌های اول و دوم، چهار معادله DP₁ یک‌گروهی (29) در نهایت به معادله‌های پخش دوگروهی

$$-\frac{d}{dx} D_1 \frac{d\Phi_1}{dx} + \Sigma_0 \Phi_1 = 2\Sigma_0 \Phi_2 + S_0 \quad (38)$$

$$-\frac{d}{dx} D_2 \frac{d\Phi_2}{dx} + \left(\frac{3}{2}\Sigma_0 + \frac{15}{8}\Sigma_2\right) \Phi_2 = \frac{3}{4}\Sigma_0 \Phi_1 - \frac{3}{4}S_0 \quad (39)$$

تبدیل می‌شوند که آن‌ها را معادلات SDP₁ می‌نامیم. روابط

$$\phi_1(x) = -D_1(x) \frac{d\Phi_1(x)}{dx} \quad (40)$$

$$\phi_2(x) = -D_2(x) \frac{d\Phi_2(x)}{dx} \quad (41)$$

از جای‌گذاری مقادیر تعریف‌شده برای $D_j(x)$ و $\Phi_j(x)$ در (30) و (31) قابل نتیجه‌گیری هستند.

از مقایسه (38) و (39) با معادله‌های پخش دوگروهی (Stacey, 2007)

$$-\frac{d}{dx} D_1 \frac{d\Phi_1}{dx} + \Sigma_r^1 \Phi_1 = \Sigma_s^{2 \rightarrow 1} \Phi_2 + S_1 \quad (42)$$

$$-\frac{d}{dx} D_1 \frac{d\Phi_1}{dx} + \Sigma_r^2 \Phi_2 = \Sigma_s^{1 \rightarrow 2} \Phi_1 + S_2 \quad (43)$$

که

$$S_j = \chi_j (\nu \Sigma_f^1 \Phi_1 + \nu \Sigma_f^2 \Phi_2) + q_e^j$$

پارامترهای فیزیکی لازم برای حل معادلات SDP₁ توسط یک کد پخش چندگروهی به دست می‌آیند. مقادیر این پارامترها در جدول ۲ آمده است.

جدول ۲- پارامترهای معادله پخش دوگروهی نتیجه‌شده از معادله‌های (38) و (39)

	$j = 1$	$j = 2$
D_j	$(3\Sigma_1)^{-1}$	$(3\Sigma_3)^{-1}$
Σ_r^j	Σ_0	$(3/2)\Sigma_0 + (15/8)\Sigma_2$
$\Sigma_s^{1 \rightarrow j}$	-	$(3/4)\Sigma_0$
$\Sigma_s^{2 \rightarrow j}$	$2\Sigma_0$	-
χ_j	1	$-3/4$
$\nu \Sigma_f^j$	$\nu \Sigma_f$	$-2\nu \Sigma_f$
q_e^j	q_e	$-(3/4)q_e$

بعد از به دست آمدن Φ_1 و Φ_2 ، شار کل در تقریب DP₁ به صورت

$$\phi_0(x) = \Phi_1(x) - 2\Phi_2(x) \quad (44)$$

طبق (36) و (37) محاسبه می‌شود.

شرایط مرزی معادلات SDP₁

برای شرط مرزی خلأ در مرز سمت چپ، $x = x_-$ از اعمال (18) در (22)، روابط

$$\begin{aligned}\phi_0(x_-) &= \phi_0^-(x_-) \\ \phi_1(x_-) &= -\frac{1}{2}\phi_0^-(x_-) + \frac{1}{2}\phi_1^-(x_-) \\ \phi_2(x_-) &= -\frac{3}{4}\phi_1^-(x_-) \\ \phi_3(x_-) &= \frac{1}{8}\phi_0^-(x_-) + \frac{3}{8}\phi_1^-(x_-)\end{aligned}$$

حاصل می‌شوند. با جای‌گذاری رابطه‌های اول و سوم معادلات بالا در رابطه‌های دوم و چهارم آن، دو معادله

$$\begin{aligned}\phi_1(x_-) &= -\frac{1}{2}\phi_0(x_-) - \frac{2}{3}\phi_2(x_-) \\ \phi_3(x_-) &= \frac{1}{8}\phi_0(x_-) - \frac{1}{2}\phi_2(x_-)\end{aligned}$$

به دست می‌آیند. در نهایت، با نوشتن ϕ_n ها در بالا بر حسب Φ_j ها، طبق (36)، (37)، (40) و (41)، معادله‌های

$$-D_1 \frac{d\Phi_1}{dx} \Big|_{x=x_-} = -\frac{1}{2}\Phi_1(x_-) + \frac{1}{3}\Phi_2(x_-) \quad (45a)$$

$$-D_2 \frac{d\Phi_2}{dx} \Big|_{x=x_-} = \frac{1}{8}\Phi_1(x_-) - \frac{3}{4}\Phi_2(x_-) \quad (45b)$$

نتیجه می‌شوند. به طور مشابه معادلات شرط مرزی خلأ برای مرز سمت راست عبارت‌اند از

$$-D_1 \frac{d\Phi_1}{dx} \Big|_{x=x_+} = \frac{1}{2}\Phi_1(x_+) - \frac{1}{3}\Phi_2(x_+) \quad (46a)$$

$$-D_2 \frac{d\Phi_2}{dx} \Big|_{x=x_+} = -\frac{1}{8}\Phi_1(x_+) + \frac{3}{4}\Phi_2(x_+) \quad (46b)$$

برای شرط مرزی بازتابنده کامل، از جای‌گذاری (19) در (22) نتیجه می‌شود

$$\phi_1(x_{\pm}) = \phi_3(x_{\pm}) = 0$$

قرار دادن نتیجه فوق در معادلات (40) و (41) به روابط

$$D_1 \frac{d\Phi_1}{dx} \Big|_{x=x_{\pm}} = 0 \quad (47a)$$

$$D_2 \frac{d\Phi_2}{dx} \Big|_{x=x_{\pm}} = 0 \quad (47b)$$

منتج می‌شود.

$$\Sigma_{s,n}^{g' \rightarrow g} = 0, \quad n \geq 1, \quad g' \neq g \quad \text{۲-۳ تبدیل معادلات DP₁ چندگروهی به معادلات}$$

پخش چندگروهی

یعنی چشم‌پوشی از پراکندگی بین‌گروهی ممان‌های مرتبه

اول و بالاتر سطح مقطع پراکندگی (Brantley & Larsen, 2000). معادلات DP₁ چندگروهی عبارت‌اند از

با لحاظ کردن تعداد G گروه انرژی در معادلات یک‌گروهی

(29) و با فرض

$$\frac{d\phi_1^g}{dx} + \Sigma_0^g \phi_0^g = \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,0}^{g' \rightarrow g} \phi_0^{g'} + S_0^g \quad (48a)$$

$$\frac{1}{3} \frac{d\phi_0^g}{dx} + \frac{2}{3} \frac{d\phi_2^g}{dx} + \Sigma_1^g \phi_1^g = 0 \quad (48b)$$

$$\frac{2}{5} \frac{d\phi_1^g}{dx} + \frac{8}{15} \frac{d\phi_3^g}{dx} + \Sigma_2^g \phi_2^g = 0 \quad (48c)$$

$$\frac{1}{3} \frac{d\phi_2^g}{dx} + \Sigma_3^g \phi_3^g = 0 \quad (48d)$$

که

$$\Sigma_0^g \equiv \Sigma_t^g - \Sigma_{s,0}^{g \rightarrow g}$$

$$\Sigma_1^g \equiv \Sigma_t^g - \Sigma_{s,1}^{g \rightarrow g}$$

$$\Sigma_2^g \equiv \frac{16}{15} \Sigma_t^g - \Sigma_{s,2}^{g \rightarrow g}$$

$$\Sigma_3^g \equiv 2\Sigma_t^g - \frac{7}{8} \Sigma_{s,3}^{g \rightarrow g}$$

و

$$S_0^g(x) = \chi_g \sum_{g=1}^G \nu \Sigma_f^g \phi_0^g(x) + q_e^g(x)$$

معادلات G گروهی (48) را با عملیاتی مشابه آنچه در حالت

یک‌گروهی انجام شد می‌توان به معادلات پخش $2G$ گروهی

$$-\frac{d}{dx} D_1^g \frac{d\Phi_1^g}{dx} + \Sigma_0^g \Phi_1^g = 2\Sigma_0^g \Phi_2^g + \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,0}^{g' \rightarrow g} (\Phi_1^{g'} - 2\Phi_2^{g'}) + S_0^g \quad (49)$$

$$-\frac{d}{dx} D_2^g \frac{d\Phi_2^g}{dx} + \left(\frac{3}{2} \Sigma_0^g + \frac{15}{8} \Sigma_2^g \right) \Phi_2^g = \frac{3}{4} \Sigma_0^g \Phi_1^g - \frac{3}{4} \sum_{g' \neq g}^G \Sigma_{s,0}^{g' \rightarrow g} (\Phi_1^{g'} - 2\Phi_2^{g'}) - \frac{3}{4} S_0^g \quad (50)$$

تبدیل نمود که از آن‌ها با عنوان معادلات SDP₁ چندگروهی یاد می‌کنیم. با توجه به (44)، داریم

$$\phi_0^g(x) = \Phi_1^g(x) - 2\Phi_2^g(x) \quad (51)$$

پارامترهای ورودی مورد نیاز یک کد پخش چندگروهی برای حل معادلات (49) و (50) از مقایسه آن‌ها با معادله‌های پخش چندگروهی (Stacey, 2007)

$$-\frac{d}{dx}D_j \frac{d\Phi_j}{dx} + \Sigma_r^j \Phi_j = \sum_{j' \neq j} \Sigma_s^{j' \rightarrow j} \Phi_j + S_j, \quad j = 1, 2, \dots, 2G \quad (52)$$

$$S_j = \chi_j \sum_j \nu \Sigma_f^j \Phi_j + q_e^j \quad (53)$$

نتیجه می‌شوند که در جدول ۳ مشخص شده‌اند.

جدول ۳- پارامترهای معادله پخش چندگروهی نتیجه‌شده از معادله‌های (49) و (50)

	$j = \text{odd}$	$j = \text{even}$
Φ_j	$\Phi_1^{(j+1)/2}$	$\Phi_2^{j/2}$
D_j	$(3\Sigma_1^{(j+1)/2})^{-1}$	$(3\Sigma_3^{j/2})^{-1}$
Σ_r^j	$\Sigma_0^{(j+1)/2}$	$(3/2)\Sigma_0^{j/2} + (15/8)\Sigma_2^{j/2}$
$\Sigma_s^{j' \rightarrow j}$	$\begin{cases} 2\Sigma_0^{(j+1)/2}, & j' = j + 1 \\ \Sigma_{s,0}^{(j'+1)/2 \rightarrow (j+1)/2}, & j' = \text{odd} \\ -2\Sigma_{s,0}^{j'/2 \rightarrow (j+1)/2}, & j' = \text{even} \end{cases}$	$\begin{cases} (3/4)\Sigma_0^{j/2}, & j' = j - 1 \\ -(3/4)\Sigma_{s,0}^{(j'+1)/2 \rightarrow j/2}, & j' = \text{odd} \\ (3/2)\Sigma_{s,0}^{j'/2 \rightarrow j/2}, & j' = \text{even} \end{cases}$
χ_j	$\chi_{(j+1)/2}$	$-(3/4)\chi_{j/2}$
$\nu \Sigma_f^j$	$\nu \Sigma_f^{(j+1)/2}$	$-2\nu \Sigma_f^{j/2}$
q_e^j	$q_e^{(j+1)/2}$	$-(3/4)q_e^{j/2}$

شرایط مرزی معادله‌های (49) و (50) در مرزهای خلأ و بازتابنده به ترتیب صورت

$$-D_j \frac{d\Phi_j}{dx} \Big|_{x=x_{\pm}} = \begin{cases} \pm \frac{1}{2} \Phi_j(x_{\pm}) \mp \frac{1}{3} \Phi_{j+1}(x_{\pm}), & j = \text{odd} \\ \pm \frac{3}{4} \Phi_j(x_{\pm}) \mp \frac{1}{8} \Phi_{j-1}(x_{\pm}), & j = \text{even} \end{cases} \quad (54)$$

$$D_j \frac{d\Phi_j}{dx} \Big|_{x=x_{\pm}} = 0 \quad (55)$$

هستند که از معادلات (45) تا (47) نتیجه شده‌اند.

۳- حل عددی معادلات SDP₁ با روش المان محدود

در این بخش چگونگی حل معادلات SDP₁ چند گروهی (49) و (50) با روش المان محدود با رویکرد وردشی (variational) مطرح می‌شود. در این روش، گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از طریق تقسیم دامنه مسئله به تعدادی المان انجام می‌شود. توابع درون‌یابی در هر المان بر حسب پارامترهای مربوط به نقاط گسسته یا گره‌های روی مرزهای المان فرمول‌بندی می‌شوند. توابع درون‌یابی

المان‌های مجاور هم از طریق پارامترهای گره‌ها به یکدیگر مرتبط می‌شوند که به این ترتیب شرایط پیوستگی در مرزهای المان‌ها برقرار می‌شود. سپس، توابع آزمون حاصله در تابعی (functional) مشخصه مسئله قرار داده می‌شوند. در نهایت، الزام تابعی به ساکن بودن نسبت به وردش (variation) اول متغیر(های) مجهول، به مجموعه‌ای از معادلات جبری هم‌زمان برای پارامترهای گره‌ها می‌انجامد که با حل آن پارامترهای مجهول روی گره‌ها به دست می‌آیند.

به عنوان اولین قدم تابعی

$$F[\Phi] = \frac{1}{2} \int_L dx \left\{ D \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 + \Sigma_r \Phi^2 - 2\Phi S \right\} + \frac{1}{2} \{ \gamma \Phi^2 + 2\Phi q \} \Big|_{x=x_{\pm}} \quad (56)$$

را در نظر می‌گیریم که معادله پخش یک‌گروهی

$$-\frac{d}{dx} D \frac{d\Phi}{dx} + \Sigma_r \Phi = S$$

به عنوان معادله Euler-Lagrange در طول L و شرط

مرزی طبیعی (natural)

$$D \frac{d\Phi}{dx} + \gamma \Phi + q \quad (57)$$

روی دو مرز $x = x_+$ و $x = x_-$ از آن استخراج می‌شوند (Lewis & Miller, 1984; Semenza et al., 1972). طبق روش المان محدود، دامنه مسئله به تعداد N المان کوچک L_n تقسیم می‌شود به طوری که

$$L = \sum_{\text{assemble}\{n\}} L_n$$

بر این اساس تابعی (56) نیز به صورت

$$F[\Phi] = \sum_{\text{assemble}\{n\}} F_n[\Phi]$$

گسسته شده و در هر المان n از رابطه

$$F_n[\Phi] = \frac{1}{2} D_n \int_{L_n} dx \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \Sigma_{r,n} \int_{L_n} dx \Phi^2 - \int_{L_n} dx \Phi S + \frac{1}{2} \gamma \Phi^2 \Big|_{x=x_{\pm}} + \Phi q \Big|_{x=x_{\pm}} \quad (58)$$

محاسبه می‌شود.

با استفاده از بردار توابع درون‌یابی یک‌بعدی \mathbf{c}_n شار کل را به صورت

$$\Phi(x) = \mathbf{c}_n^T(x) \Phi_n \quad (59)$$

می‌نویسیم که Φ_n بردار حاوی مقدار شار کل در نودهای المان n است. نتایج ارائه‌شده در این مقاله با استفاده از توابع خطی

$$\mathbf{c}_n(x) = \frac{1}{|x_2^{(n)} - x_1^{(n)}|} \begin{pmatrix} x_2^{(n)} - x & x - x_1^{(n)} \end{pmatrix}^T$$

محاسبه شده‌اند که $x_i^{(n)}$ مکان نود i المان n است. با (assemble) ماتریس‌های مربوطه و الزام اینکه وردش اول جای‌گذاری عبارت (59) در معادله (58)، سرهم‌بندی کردن تابعی نسبت به متغیر Φ صفر باشد، دستگاه معادلات

$$\mathbf{A} \Phi = \mathbf{f} \quad (60)$$

حاصل می‌شود که ماتریس مربعی \mathbf{A} و ماتریس ستونی \mathbf{f} حاصل سرهم‌بندی ماتریس‌های

$$\mathbf{A}_n = D_n \int_{L_n} dx \left(\frac{d\mathbf{c}_n^T}{dx} \right)^T \frac{d\mathbf{c}_n^T}{dx} + \Sigma_{r,n} \int_{L_n} dx \mathbf{c}_n \mathbf{c}_n^T + \gamma \mathbf{c}_n \mathbf{c}_n^T |_{x=x_{\pm}}$$

$$\mathbf{f}_n = \int_{L_n} dx \mathbf{c}_n S - q \mathbf{c}_n |_{x=x_{\pm}}$$

روی تمام المان‌ها هستند. با حل دستگاه معادلات خطی (60) بردار Φ و در نتیجه مقدار شار کل در تمام گره‌های در نظر گرفته شده روی طول L از دامنه مسئله به دست می‌آید.

در حالت چندگروهی (60) به صورت

$$\mathbf{A}^j \Phi^j = \mathbf{f}^j, \quad j = 1, 2, \dots, 2G \quad (61)$$

درمی‌آید که \mathbf{A}^j و \mathbf{f}^j از سرهم‌بندی ماتریس‌های

$$\mathbf{A}_n^j = D_n^j \int_{L_n} dx \left(\frac{d\mathbf{c}_n^T}{dx} \right)^T \frac{d\mathbf{c}_n^T}{dx} + \Sigma_{r,n}^j \int_{L_n} dx \mathbf{c}_n \mathbf{c}_n^T + \gamma_j \mathbf{c}_n \mathbf{c}_n^T |_{x=x_{\pm}}$$

$$\mathbf{f}_n^j = \sum_{j' \neq j} \Sigma_s^{j' \rightarrow j} \int_{L_n} dx \mathbf{c}_n \mathbf{c}_n^T + \int_{L_n} dx \mathbf{c}_n S_j - q_j \mathbf{c}_n |_{x=x_{\pm}}$$

نتیجه می‌شوند. جمله آخر هر دو رابطه بالا، طبق تعریف تابعی (56)، تنها روی مرزهای خلأ محاسبه می‌شوند. با توجه به روابط (54) و (57) می‌توان نشان داد که برای المانی در مرز $x = x_{\mp}$ باید داشته باشیم

$$q_j = \begin{cases} \pm \frac{1}{3} \Phi_{\mp}^{j+1}, & j = \text{odd} \\ \pm \frac{1}{8} \Phi_{\mp}^{j-1}, & j = \text{even} \end{cases} \quad \gamma_j = \begin{cases} \mp \frac{1}{2}, & j = \text{odd} \\ \mp \frac{3}{4}, & j = \text{even} \end{cases}$$

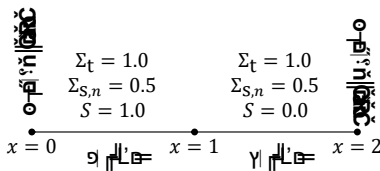
که Φ_{\mp}^j نشان‌دهنده بردار شار کل گروه j المان واقع روی مرز $x = x_{\mp}$ است.

۴- نتایج و بحث

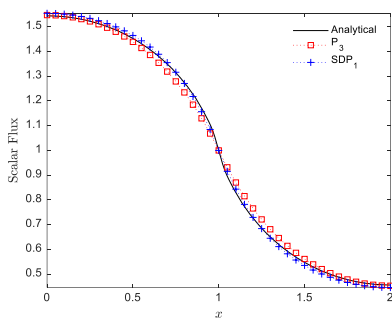
شده‌اند. متوسط خطا نسبی شار کل محاسبه شده با روش‌های SDP₁ و P₃ به ترتیب 1.252% و 1.295% و بیشینه خطا نسبی آن‌ها 3.834% و 5.074% است. هر دو روش خطا متوسط تقریباً یکسانی دارند، اما بیشینه خطا روش P₃ بیشتر از SDP₁ بوده و در مرز خلأ اتفاق می‌افتد جایی که نقطه قوت روش SDP₁ محسوب می‌شود. مزیت مهم روش SDP₁ توانایی آن در تقریب مناسب رفتار شار زاویه‌ای نوترون است. در شکل ۲ دیده می‌شود که شار زاویه‌ای حاصل از این روش، مشابه جواب تحلیلی، در $\mu = 0$ ناپیوسته بوده و در بازه $\mu \geq 0$ نیز تغییراتی نزدیک به منحنی تحلیلی دارد، اما این دو نکته در مورد شار به دست آمده از روش P₃ صادق نیست.

۴-۲- مسئله سلول شبکه

در این آزمون تیغه‌ای دوناچی‌ای با وجود چشمه‌ای یکنواخت در یکی از دو ناحیه بررسی می‌شود. این مسئله معمولاً به عنوان مسئله سلول مکرر (repeated cell problem) یا مسئله شبکه سلول (lattice cell problem) شناخته می‌شود. مشخصات هندسی و داده‌های سطح مقاطع تیغه دوناچی‌ای در شکل ۳ داده شده‌اند.



شکل ۳- هندسه و سطح مقاطع مسئله آزمون ۲



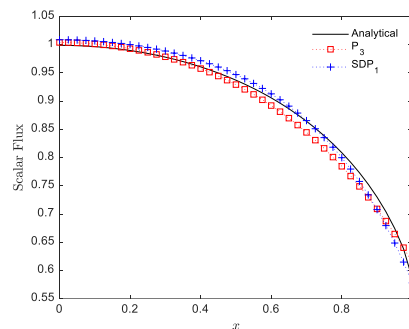
شکل ۴- نمودار شار کل برای مسئله آزمون ۲

شارهای کل به دست آمده از دو روش عددی در شکل ۴ در کنار منحنی تحلیلی مربوطه رسم شده‌اند. منحنی تحلیلی در این شکل با استفاده از فرمول داده شده در (Williams & Wood, 1972) حاصل شده است. متوسط و بیشینه خطا

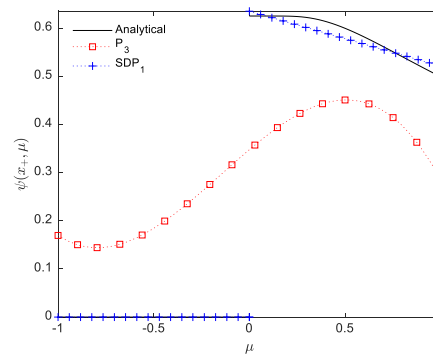
در این بخش نتایج روش SDP₁ برای چهار مسئله آزمون یک‌بعدی با داده‌های تحلیلی موجود و همچنین نتایج روش P₃ مقایسه می‌شوند. معادلات P₃ نیز با روش المان محدود و مطابق فرمول‌بندی (Riyait & Ackroyd, 1987) حل شده‌اند. تمام مسئله‌ها با استفاده از تعداد المان‌های محدود خطی یکسان برای روش‌های SDP₁ و P₃ حل شده‌اند.

۴-۱- چشمه یکنواخت با پراکندگی رو به جلو

این مسئله شامل تیغه‌ای به ضخامت 1.0cm با سطح مقطع کل $\Sigma_t = 1.0\text{cm}^{-1}$ ، سطح مقطع پراکندگی ناهمسانگرد $\Sigma_{s,n} = 0.2\text{cm}^{-1}$ و چشمه‌ای یکنواخت به قدرت $S = 1.0$ است. برای مرزهای سمت چپ و راست تیغه به ترتیب شرط‌های مرزی بازتابنده کامل و خلأ در نظر گرفته می‌شود. شار کل و شار زاویه‌ای به دست آمده از روش‌های SDP₁ و P₃ در مرز سمت راست، $x = x_+$ ، به ترتیب در شکل‌های ۱ و ۲ رسم شده‌اند.



شکل ۱- نمودار شار کل برای مسئله آزمون ۱



شکل ۲- نمودار شار زاویه‌ای در مرز سمت راست برای مسئله آزمون ۱

منحنی‌های تحلیلی موجود در این دو شکل از فرمول‌های ارائه شده در (Galliarra & Williams, 1979) حاصل

مقادیر عددی نسبت به نمودار تحلیلی در جدول ۴ آورده شده‌اند.

جدول ۴- خطاهای شار کل و عامل عدم مزیت برای مسئله آزمون ۲

	متوسط خطا شار کل	بیشینه خطا شار کل	ξ (exact = 2.344)
P_3	1.887%	5.525%	2.253(-3.87%)
SDP_1	1.290%	2.458%	2.371(1.173%)

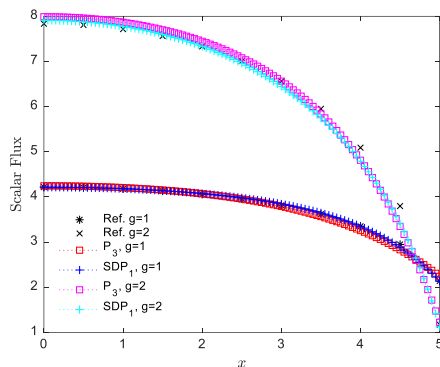
میزان دقت آن به دقت بودن محاسبه شار کل وابسته است. مقادیر به دست آمده برای ξ در این مسئله در جدول ۴ با مقدار دقیق آن مقایسه شده‌اند. این مقدار دقیق از رابطه ارائه شده در (Williams & Wood, 1972) به دست آمده است. در این جدول مشاهده می‌شود که روش SDP_1 با خطایی حدود 2.5% کمتر کمیت عامل عدم مزیت حرارتی تیغه را محاسبه نموده است.

۳-۴- پراکندگی ناهمسانگرد دوگروهی

داده‌های جدول ۵ سطح مقاطع دوگروهی تیغه آزمون به کار گرفته شده در سومین مسئله را مشخص می‌کنند.

جدول ۵- سطح مقاطع دوگروهی مسئله آزمون ۳

g	Σ_t^g	$\Sigma_{s,n}^{g \rightarrow g}$	$\Sigma_{s,n}^{g \rightarrow g+1}$	$\Sigma_{s,n}^{g \rightarrow g-1}$	S_g
1	0.31	$\begin{cases} 0.10, & n = \text{odd} \\ 0.02, & n = \text{even} \end{cases}$	$\begin{cases} 0.20, & n = \text{odd} \\ 0.10, & n = \text{even} \end{cases}$	-	1.0
2	2.10	$\begin{cases} 2.00, & n = \text{odd} \\ 0.20, & n = \text{even} \end{cases}$	-	$\begin{cases} 0.00, & n = \text{odd} \\ 0.00, & n = \text{even} \end{cases}$	0.0



شکل ۵- نمودار شار کل برای مسئله آزمون ۳

چنان‌که اطلاعات این جدول نشان می‌دهد، و در شکل ۴ نیز قابل مشاهده است، نتایج روش SDP_1 در این مسئله دقیق‌تر و نزدیک‌تر به مقادیر تحلیلی است. خطا متوسط شار کل روش P_3 حدود 0.6% بالاتر از روش SDP_1 و بیشینه خطا آن بیش از دو برابر است. در مسائلی از این نوع معمولاً کمیتی به نام عامل عدم مزیت حرارتی (thermal disadvantage factor) محاسبه شده و با مقادیر تحلیلی موجود مقایسه می‌شود. عامل عدم مزیت حرارتی ξ از تقسیم متوسط شار کل در ناحیه با چشمه (ناحیه سوخت) بر شار کل در ناحیه بدون چشمه (ناحیه کندکننده) به دست می‌آید و بنابراین

این تیغه یک‌ناحیه‌ای 5.0cm ضخامت داشته و شرط‌های مرزی بازتابنده کامل و خلأ به ترتیب در مرزهای سمت چپ و راست آن لحاظ می‌شوند. شار کل دوگروهی حاصل شده از روش‌های عددی در شکل ۵ رسم شده است.

در (Williams, 1985) شار کل گروه اول و دوم برای زمانی که ابعاد تیغه به سمت بی‌نهایت میل می‌کند به ترتیب مقادیر ثابت 4.7620 و 9.5241 ذکر شده است. شار کل در تیغه نامتناهی (مرز چپ و راست هر دو بازتابنده کامل باشند) به دست آمده از روش‌های SDP₁ و P₃ یکسان بوده و عبارت است از

$$\phi_g(\infty) = \begin{cases} 4.7619, & g = 1 \\ 9.5238, & g = 2 \end{cases}$$

۴-۴- مسئله بحرانی دوگروهی

محاسبه ضریب تکثیر مؤثر و شار کل تیغه‌ای به ضخامت (بحرانی) 7.566853cm با شرط مرزی بازتابنده کامل در سمت چپ و خلأ در سمت راست موضوع این مسئله است. اطلاعات سطح مقاطع دوگروهی این تیغه یک‌ناحیه‌ای در جدول ۷ درج شده‌اند.

مقادیر دقیق شار کل دو گروه که در تعدادی از نقاط تیغه توسط (Williams, 1985) گزارش شده‌اند نیز در این شکل مشخص شده‌اند. جدول ۶ متوسط و بیشینه خطا شار کل دو گروه (نسبت به مقادیر دقیق موجود در برخی نقاط) را نشان می‌دهد. هر دو روش عددی خطا تقریباً یکسانی در محاسبه شار کل گروه دوم دارند، اما در مورد شار گروه اول خطا متوسط و بیشینه روش SDP₁ به ترتیب حدوداً نصف و یک‌سوم روش P₃ هستند.

جدول ۶- خطا متوسط و بیشینه شار کل دوگروهی مسئله آزمون

۳			
	g	متوسط خطا شار کل	بیشینه خطا شار کل
P ₃	1	1.513%	4.792%
	2	3.078%	11.830%
SDP ₁	1	0.515%	2.194%
	2	2.668%	10.358%

جدول ۷- سطح مقاطع دوگروهی مسئله آزمون ۴

g	Σ_t^g	$\Sigma_{s,0}^{g \rightarrow g}$	$\Sigma_{s,0}^{g \rightarrow g+1}$	$\Sigma_{s,0}^{g \rightarrow g-1}$	Σ_f^g	ν_g	χ_g
1	0.65696	0.62568	0.029227	-	0.0010484	2.50	1.0
2	2.52025	2.44383	-	0.0	0.050632	2.50	0.0

(2003) ارائه شده‌اند. درصد خطا k_{eff} به دست آمده از روش P₃، نسبت به مقدار دقیق آن، بیش از 10 برابر خطا مقدار حاصله از روش SDP₁ است.

شکل ۶ شار کل دوگروهی بحرانی به دست آمده از روش‌های عددی را نشان می‌دهد.

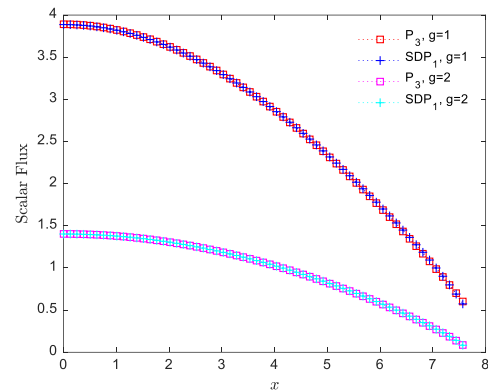
ضریب تکثیر مؤثر k_{eff} به دست آمده از روش‌های SDP₁ و P₃ در جدول ۸ آورده شده‌اند. در این جدول همچنین ضریب تکثیر مؤثر و نسبت شار کل دو گروه در حالت تیغه با ضخامت نامتناهی (شرط مرزی بازتابنده کامل در هر دو مرز تیغه) مشخص شده است. (Sood et al., مقادیر دقیق توسط

جدول ۸- ضریب تکثیر مؤثر و شارهای گروهی برای حالت تیغه

نامتناهی در مسئله آزمون ۴

	مقدار دقیق	P ₃	SDP ₁
k_{eff}	1	0.999313(0.0687%)	1.000051(-0.0051%)
k_{eff}^{∞}	1.631452	1.631452(0%)	1.631452(0%)
$\phi_1(\infty)/\phi_2(\infty)$	2.614706	2.614706(0%)	2.614706(0%)

خطا نسبی شار کل دو گروه در چهار نقطه از تیغه به همراه مقادیر مرجع مذکور در (Sood et al., 2003) در جدول ۹ آورده شده‌اند (مقادیر مرجع به صورت بهنجار شده به مقدار شار کل گروه اول در مرز سمت چپ بیان شده‌اند). خطاهای دو روش عددی در سه نقطه اول از مرتبه یکسانی هستند، اما در نقطه چهارم (مرز سمت راست) خطا نسبی روش P_3 برای هر دو گروه حدود 4% است در حالی که در روش SDP_1 خطا شار کل هر دو گروه در این نقطه بسیار کمتر و هم‌مرتبه سه نقطه دیگر است.



شکل ۶- نمودار شار کل برای مسئله آزمون ۴

جدول ۹- خطا شار کل حاصل از روش‌های عددی نسبت به مقادیر مرجع در مسئله آزمون ۴

گروه		$x = 1.826593\text{cm}$	$x = 3.805408\text{cm}$	$x = 5.632009\text{cm}$	$x = 7.566853\text{cm}$
دقیق	1	0.943363	0.761973	0.504012	0.147598
	2	0.340124	0.273056	0.173845	0.0212324
P_3	1	-0.830%	-0.0534%	0.113%	-4.86%
	2	-0.0726%	-0.0319%	0.120%	-4.35%
SDP_1	1	-0.00390%	-0.0673%	-0.355%	-0.0319%
	2	-0.0182%	-0.0823%	-0.215%	-0.481%

صحيح‌تر از ناپيوستگي زاويه‌اي شار نوترون در مرز خلا نسبت به روش P_3 مشخص شد. آزمون دوم نشان داد که روش SDP_1 در مسائل موسوم به سلول شبکه نیز عملکرد بهتری نسبت به روش P_3 داشته و می‌تواند پارامتر مهم در این گونه مسائل یعنی عامل عدم مزیت حرارتی را با خطایی چند درصد کمتر محاسبه کند. آزمون سوم مشخص کرد که برتری روش SDP_1 در مسائل چندگروهی نیز برقرار است. در نهایت، در آزمون چهارم مشاهده شد که با روش SDP_1 علاوه بر اینکه ضریب تکثیر مؤثر را با دقتی قابل توجه نسبت به روش P_3 می‌توان محاسبه نمود، شار کل بحرانی دوگروهی در مرز خلا نیز توسط این روش با خطایی با یک یا دو مرتبه بزرگی کمتر قابل حصول است.

۵- نتیجه‌گیری

روشی عددی برای حل معادلات تقریب DP_1 معادله ترازید چندگروهی نوترون در مختصات کارتزین یک‌بعدی ارائه شد. معادله‌های DP_1 چندگروهی به صورت معادله‌های پخش چندگروهی نوترون، معادلات SDP_1 ، نوشته شدند. داده‌های لازم برای حل معادلات SDP_1 توسط یک کد پخش چند گروهی استخراج شده و چگونگی حل آن‌ها با استفاده از روش المان محدود مورد بحث قرار گرفت. نتایج عددی به دست آمده از این روش برای چهار مسئله آزمون با مقادیر تحلیلی موجود برای هر آزمون و همچنین نتایج روش P_3 مقایسه شدند. در آزمون اول مزیت روش SDP_1 در ارائه توصیفی

conductivity of composite materials. 2014. 95(1): p. 14-24.

2. Wang, J., et al., A new approach to modelling the effective thermal conductivity of heterogeneous materials. 2006. 49(17-18): p. 3075-3083.

مراجع

1. Pietrak, K. and T.S.J.J.o.P.T. Wiśniewski, A review of models for effective thermal

- Matrix Nuclear Fuel Pellet. 2013.
7. McDeavitt, S.M., et al. Thoria-based cermet nuclear fuel: cermet fabrication and behavior estimates. in International Conference on Nuclear Engineering. 2002.
 8. Lee, Y. and N.Z.J.A.o.N.E. Cho, Steady- and transient-state analyses of fully ceramic microencapsulated fuel loaded reactor core via two-temperature homogenized thermal-conductivity model. 2015. **76**: p. 283-296.
 9. Song, J., et al., Neutronics and thermal hydraulics analysis of a conceptual ultra-high temperature MHD cermet fuel core for nuclear electric propulsion. 2018. **6**: p. 29.
 3. Chikhi, M., et al., Numerical modelling of the effective thermal conductivity of heterogeneous materials. 2013. **26**(3): p. 336-345.
 4. Flouy, J., et al., Modelling thermal conductivity in heterogeneous media with the finite element method. 2008. **1**(2): p. 161-170.
 5. Cho, T.W., et al., Thermal conductivity of U–Mo/Al dispersion fuel: effects of particle shape and size, stereography, and heat generation: Special Issue for ANFC2014. 2015. **52**(10): p. 1328-1337.
 6. Kim, D.-J., et al., Thermal Conductivity Measurement of Zr-ZrO₂ Simulated Inert

Solving the one-dimensional and multigroup neutron transport equation using the SDP1 method

M. Nazari,^{*1}

¹Faculty of Nuclear Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

Received: 19 - 10 - 2021

Accepted: 10 - 11 - 2022

Abstract

The double-spherical harmonics method (DP_N) is a common approximation in the study of the neutron transport equation in reactor physics problems. Inside a reactor near points where strong discontinuities in material properties occur, such as bare boundaries or areas near strong absorbers, there is usually greater anisotropy in the angular distribution of neutron flux. A more appropriate description of the angular flux behavior at such points requires the use of methods such as DP_N , which utilize separate expansions for different directions of neutron motion instead of using a single expansion for all directions, as in the P_N method. In this paper, the multigroup, one-dimensional neutron transport equation in the Cartesian coordinate system is solved using the DP_1 approximation. To do this, first the multigroup DP_1 equations and the corresponding boundary conditions are derived, then they are written in the form of multigroup neutron diffusion equations, which are here called the simplified- DP_1 or SDP_1 equations. The finite element method is then used to numerically solve the SDP_1 equations. The results of the proposed method are discussed for several different test problems in comparison with the P_3 method.

Keywords: Neutron Transport Equation, Double-Spherical Harmonics Method, Neutron Diffusion Equation, Finite Element Method
